Εισαγωγή στην Τοπολογία, 15/6/2022, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2 μον.)
Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και το υποσύνολό του

$$A = \{-3\} \cup (0,4] \cup (5,7) \cup [9,+\infty).$$

α) Να εξηγήσετε αναλυτικά (χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους ορισμούς) γιατί το σύνολο A δεν είναι ανοικτό και γιατί το σύνολο A δεν είναι κλειστό.
β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό του A, την κλειστή θήκη του A, το παράγωγο σύνολο του A (δηλ. το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A) και το σύνορο του A.

Θέμα 2. (4 μον.)
Για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να τον χαρακτηρίσετε ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ με πλήρη αιτιολόγηση (Στην περίπτωση που πρόκειται να εξετάσετε απλώς αν ένα σύνολο έχει μια ιδιότητα χρησιμοποιείτε αποκλειστικά τον ορισμό. Για να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ένα σύνθετο ισχυρισμό θα πρέπει να παρουσιάσετε πλήρη απόδειξη ενώ για να τον χαρακτηρίσετε ΛΑΘΟΣ πρέπει να παρουσιάσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα). Σε καθένα από τα παρακάτω βαθμολογείται με $0,1$ μονάδες ο χαρακτηρισμός ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και με $0,7$ μονάδες η αιτιολόγησή του.

α) Για κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) και κάθε $x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συμπαγές σύνολο. (Χρησιμοποιήστε τον ορισμό και μόνο αυτόν).

β) Αν θεωρήσουμε τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική το σύνολο $[3,7)$ είναι συμπαγές σύνολο. (Χρησιμοποιήστε τον ορισμό και μόνο αυτόν).

γ) Αν (X,ρ), (Y,d) είναι δυο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του Y το σύνολο $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

δ) Αν (X,ρ), (Y,d) είναι δυο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X το σύνολο $f(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.

ε) Αν (X,ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και K είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X με $\emptyset \neq K \neq X$ τότε το K είναι συμπαγές.

Θέμα 3. (4 μον.)
α) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) και υπάρχει ένα $a \in X$ και μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} a$ να δειχθεί ότι $x_n \xrightarrow{\rho} a$.

β) Αν (X,ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και Λ ένα κλειστό υποσύνολο του X, τότε το Λ με τη σχετική μετρική είναι πλήρες.

γ) Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια από συνεκτικά υποσύνολα του X και $y \in X$ ώστε $y \in A_i$ για κάθε $i \in I$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό.

Καλή Επιτυχία!